

# Extracción de leyes de variación frecuenciales mediante la transformada wavelet continua compleja

José Ramón Beltrán Blázquez

Departamento de Ingeniería Electrónica y Comunicaciones  
Universidad de Zaragoza  
e-mail: jrbelbla@unizar.es

Jesús Ponce de León Vázquez

Departamento de Ingeniería Electrónica y Comunicaciones  
Universidad de Zaragoza  
e-mail: jponce@unizar.es

**Abstract**—En este trabajo se presenta la transformada wavelet continua compleja como un método de análisis de señal que permite obtener un modelo de síntesis aditiva de una señal de audio. Para demostrar la potencia del método propuesto se han analizado cuatro señales no estacionarias que presentan diferentes leyes de variación frecuencial: un chirp lineal, un chirp cuadrático, un chirp hiperbólico y una señal de FM con modulación sinusoidal. Los resultados obtenidos demuestran la validez y la viabilidad del algoritmo desarrollado.

## I. INTRODUCCIÓN

Para realizar el análisis de señales estacionarias la herramienta más utilizada es la transformada de Fourier. Sin embargo, cuando se desean analizar señales no estacionarias es necesario recurrir a técnicas basadas en representaciones tiempo-frecuencia. Existen tres técnicas básicas: la transformada de Fourier enventanada o transformada corta de Fourier (STFT), la transformada wavelet y la distribución de Wigner-Ville. Un estudio comparado de las tres lo podemos encontrar, por ejemplo, en [1].

Una de las diferencias básicas entre las tres representaciones es la resolución que se puede obtener en el plano tiempo-frecuencia. En el caso de la STFT la resolución es constante para todos los instantes temporales y todas las frecuencias. La transformada wavelet, por su parte, presenta mayor resolución frecuencial y menor resolución temporal en baja frecuencia; y en alta frecuencia menor resolución frecuencial y mayor resolución temporal. La distribución de Wigner-Ville no genera dispersión temporal ni frecuencial para una delta de Dirac o una senoide pura. Sin embargo, la necesidad de eliminar los términos de interferencia que se producen provoca una pérdida de resolución en tiempo y en frecuencia [1].

En el caso del análisis de señales de audio la representación más ampliamente utilizada es la STFT y, en concreto, las implementaciones del vocoder de fase de seguimiento [2] [3]. En este caso una representación compleja de la señal, como la transformada de Fourier, permite realizar un seguimiento de la fase de la señal ventana a ventana. Debido a la pérdida de resolución temporal del análisis la información de fase no está disponible para todas las muestras de la señal y resulta necesario interpolar los valores de fase. De este modo se recupera la información de la frecuencia instantánea con bastante precisión [3].

La transformada wavelet se plantea como un método de

análisis de señal adecuado para, entre otros, la detección y caracterización de transitorios o de singularidades, o bien, para la compresión de datos [1], pero, en la mayoría de los casos, no se plantea como un método válido para la caracterización de procesos estacionarios sinusoidales.

Sin embargo, los primeros trabajos publicados sobre la transformada wavelet se plantean como un método de análisis y caracterización de la señal de audio [4] [5]. En estos trabajos en lugar de utilizar la transformada wavelet real, bien sea continua o bien sea discreta, se utiliza la transformada wavelet compleja, en este caso continua. Así, se puede disponer de información de la fase de la señal, como en la transformada de Fourier y, de este modo, recuperar la frecuencia instantánea de la señal.

Desde este punto de vista la transformada wavelet continua compleja (CCWT) se puede interpretar como el análisis de una señal mediante un banco de filtros complejo en el que podemos extraer información de amplitud y de fase en cada una de las bandas del análisis.

Este trabajo está dividido del siguiente modo. En la Sec. II se define la transformada wavelet como el filtrado de una señal mediante un banco de filtros complejo. En la Sec. III se presenta brevemente el algoritmo desarrollado. Los resultados obtenidos se presentan en la Sec. IV y las principales conclusiones en la Sec. V.

## II. LA TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA COMPLEJA

En esta sección vamos a resumir los aspectos más importantes de la Transformada Wavelet Continua (CWT). Un estudio detallado de la relación entre el filtrado paso banda de una señal y la CWT se puede encontrar en [6].

La CWT se define mediante la siguiente expresión:

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{a,b}^*(t)dt \quad (1)$$

donde \* indica la conjugación compleja y  $\psi_{a,b}(t)$  es la wavelet madre escalada un factor  $a$  y dilatada un factor  $b$ :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2)$$

Desde el punto de vista del análisis de señal, la Eq. 1 representa el filtrado de la señal  $f$  con un filtro cuya respuesta

al impulso es  $\tilde{\psi}_a(x)$

$$W_f(a, b) = f * \tilde{\psi}_a(b). \quad (3)$$

donde  $\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x}{a}\right)$  y  $\tilde{\psi}_a(t) = \psi_a(-t)$ .

La respuesta en frecuencia del filtro  $\tilde{\psi}_a(t)$  es:

$$\hat{\psi}_a(\omega) = \sqrt{a}\hat{\psi}(a\omega). \quad (4)$$

La transformada wavelet puede ser interpretada como el filtrado de una señal con un banco de filtros cuya respuesta en frecuencia es  $\hat{\psi}_a(\omega)$ . La modificación del parámetro de escala  $a$  permite modificar la frecuencia central del filtro y se genera así un banco de filtros de  $Q$  constante. Una información más detallada acerca del diseño del banco de filtros utilizado en este trabajo se puede encontrar en [7].

En nuestro caso la wavelet utilizada es compleja, por tanto los coeficientes de la transformada son complejos y se puede extraer la parte real  $R_f(a, b)$  y la parte imaginaria  $I_f(a, b)$  de dichos coeficientes.

Así, el módulo y la fase de la CCWT se definen como:

$$M_f(a, b) = \sqrt{R_f^2(a, b) + I_f^2(a, b)} \quad (5)$$

$$\Phi_f(a, b) = \arctan\left(\frac{I_f(a, b)}{R_f(a, b)}\right) \quad (6)$$

En este trabajo el módulo de la transformada localizado en determinados puntos del plano tiempo-frecuencia contiene la información de la envolvente temporal de cada parcial y la fase en esas localizaciones proporcionará la fase del parcial correspondiente. Los aspectos teóricos que justifican el algoritmo desarrollado han sido presentados en [8].

### III. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

El algoritmo desarrollado en este trabajo proporciona un modelo de síntesis aditiva de la señal original que consiste en determinar la evolución temporal de la amplitud y de la fase de un conjunto de osciladores sinusoidales denominados *parciales*.

$$s(t) = \sum_{i=1}^K a_i(t) \cos \phi_i(t) \quad (7)$$

La información de cada parcial se obtiene agrupando los coeficientes de la transformada wavelet en las localizaciones frecuenciales donde el módulo de la transformada posee un nivel energético suficiente. El algoritmo de análisis consta de tres etapas representadas gráficamente en la Fig. 1.

- 1) En un primer paso se detectan las frecuencias en las que se localiza la energía de la señal calculando los límites en los que la energía de la FFT de la señal se encuentra por encima de un determinado umbral. Con esta información se determinan las escalas del análisis y se define el banco de filtros.
- 2) En la segunda etapa se realiza la transformada wavelet de la señal en las escalas determinadas previamente. Para obtener las bandas que constituyen un parcial se realiza una suma temporal del módulo de la transformada y se

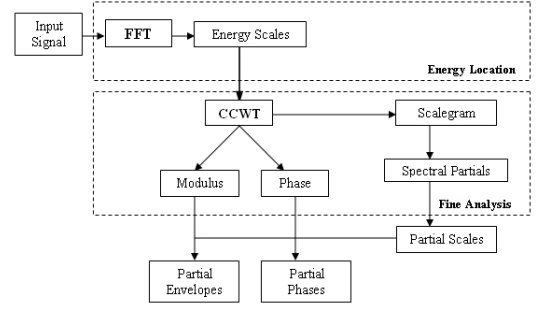


Fig. 1. Diagrama en bloques del algoritmo de análisis.

analizan los límites en los que se concentra la energía para cada parcial.

- 3) Para cada uno de los parciales detectados se calcula el módulo y la fase de los coeficientes wavelet que representan, respectivamente, la envolvente y la fase del modelo de la Eq. 7. La resíntesis de la señal se obtiene mediante un proceso de síntesis aditiva en el dominio temporal.

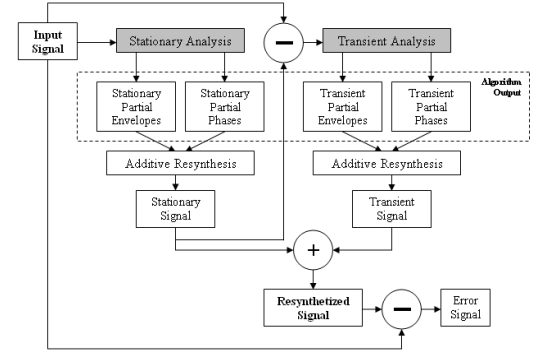


Fig. 2. Diagrama en bloques del algoritmo de análisis estacionario y transitorio.

Para recuperar la señal original se realiza un doble análisis. El banco de filtros utilizado en el primer paso es estrecho en frecuencia, lo que permite localizar los parciales con una buena resolución frecuencial. Este análisis representa la parte estacionaria de la señal  $s_e(t)$ . Debido al principio de incertidumbre una alta localización frecuencial impide una buena localización temporal y los transitorios de la señal se ven deslocalizados.

Una vez resintetizada la señal estacionaria se resta en el dominio del tiempo de la señal original y se realiza un análisis idéntico al anterior, salvo que el banco de filtros utilizado es más ancho en frecuencia. A la resíntesis de este segundo paso le hemos denominado señal transitoria  $s_t(t)$ . La señal sintética final se recupera mediante la suma temporal de ambas. En la Fig. 2 se puede ver el diagrama en bloques del algoritmo desarrollado.

$$s_s(t) = s_e(t) + s_t(t) \quad (8)$$

La diferencia entre la señal sintética y la señal original es un error que se ha considerado un fondo de ruido y del no se realiza ningún tipo de modelado [3].

#### IV. RESULTADOS

Para comprobar la validez del algoritmo propuesto se han analizado cuatro señales con cuatro leyes de variación frecuencial diferentes: un chirp lineal, un chirp cuadrático, un chirp exponencial y una señal de FM con modulación sinusoidal. La frecuencia instantánea de la señal se ha obtenido a partir su definición como derivada de la fase instantánea de cada parcial. Las cuatro señales poseen una duración de medio segundo, con una frecuencia de muestreo de 44,1kHz y una envolvente de 0,99 de amplitud máxima y un suavizado inicial y final de 0,025 segundos.

##### A. Chirp lineal

El chirp lineal se define como:

$$f(t) = A(t) \cos(at^2 + bt + c) \quad (9)$$

En nuestro caso se ha generado una señal con una frecuencia instantánea que varía linealmente entre 100Hz y 8kHz como se puede apreciar en la Fig. 3.

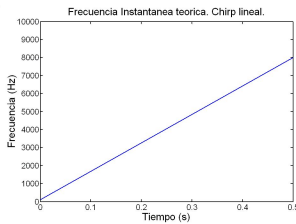


Fig. 3. Frecuencia instantánea teórica del chirp lineal. La frecuencia varía entre 100Hz y 8kHz.

La amplitud y la frecuencia instantánea obtenidas mediante el algoritmo puede verse en la Fig. 4. Se observa la correcta detección de la envolvente y la recuperación de la frecuencia instantánea de la señal original. En los extremos de la señal aparecen unos términos de error en la frecuencia instantánea debido a que la amplitud de la señal es muy pequeña.

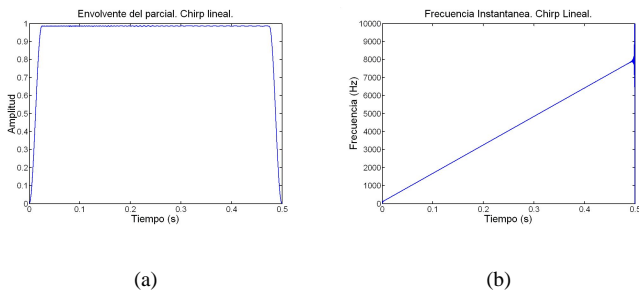


Fig. 4. (a) Módulo obtenido para el chirp lineal. (b) Frecuencia instantánea obtenida para el chirp lineal.

##### B. Chirp cuadrático

El chirp cuadrático se puede expresar como:

$$f(t) = A(t) \cos(at^3 + bt^2 + ct + d) \quad (10)$$

En este segundo caso la señal generada presenta una variación en frecuencia cuadrática entre 100Hz y 8kHz tal y como se puede apreciar en la Fig. 5.

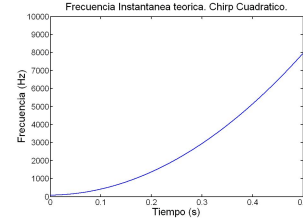


Fig. 5. Frecuencia instantánea teórica del chirp cuadrático. La frecuencia varía entre 100Hz y 8kHz.

De nuevo los resultados obtenidos para la envolvente y la frecuencia instantánea son correctos. Estos resultados pueden verse en la Fig. 6. La envolvente recupera la forma de la envolvente original y la frecuencia instantánea es una parábola idéntica a la teórica con un valor inicial de 100Hz y un valor final de 8kHz.

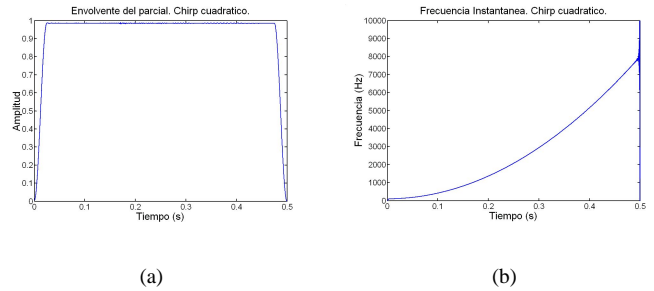


Fig. 6. (a) Módulo obtenido para el chirp cuadrático. (b) Frecuencia instantánea obtenida para el chirp cuadrático.

##### C. Chirp hiperbólico

El chirp hiperbólico presenta una variación mucho más rápida conforme aumenta la frecuencia. Debido a que los filtros utilizados son de Q constante se podría generar una falta de precisión en la localización frecuencial en alta frecuencia. Sin embargo, la caracterización de la frecuencia instantánea a través de la fase instantánea proporciona muy buenos resultados.

El chirp hiperbólico obedece a la siguiente ecuación:

$$f(t) = A(t) \cos\left(2\pi \frac{\alpha}{\beta - t}\right) \quad (11)$$

Se han calculado  $\alpha$  y  $\beta$  para que la frecuencia instantánea varíe de nuevo entre 100Hz y 8kHz. Esta variación se puede apreciar en la Fig. 7.

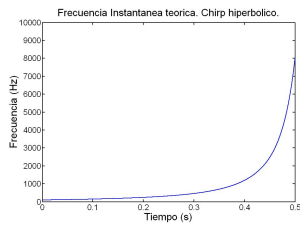


Fig. 7. Frecuencia instantánea teórica del chirp hiperbólico. La frecuencia varía entre 100Hz y 8kHz.

Los resultados obtenidos se presentan en la Fig. 8. De nuevo la recuperación de envolvente y la frecuencia instantánea es correcta. Puede observarse como tanto la amplitud como la frecuencia instantánea se corresponden con lo datos del modelo de la señal original.

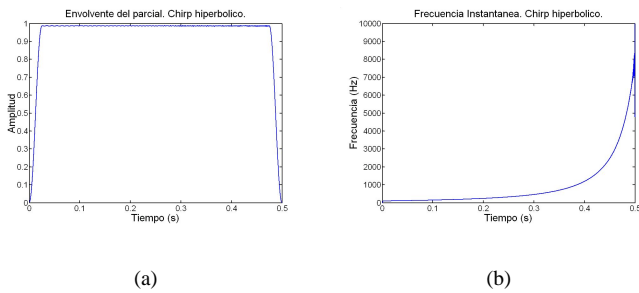


Fig. 8. (a) Módulo obtenido para el chirp hiperbólico. (b) Frecuencia instantánea obtenida para el chirp hiperbólico.

#### D. FM sinusoidal

Es este último caso se ha sintetizado una señal de FM con una variación sinusoidal. La frecuencia central  $f_0$  se ha elegido de 1kHz y la excursión frecuencial  $B$  de 50Hz con una frecuencia  $f_m$  de 25Hz. En la Fig. 9 se puede observar la frecuencia instantánea de la señal de FM.

$$f(t) = A(t) \cos \left( 2\pi f_0 t + \frac{B}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \right) \quad (12)$$

En la Fig. 10 podemos ver la amplitud y la frecuencia instantánea recuperadas mediante el algoritmo. En este caso la envolvente se ve ligeramente alterada respecto a la de la señal original. Sin embargo, la reconstrucción de la señal es prácticamente indistinguible acústicamente de la original.

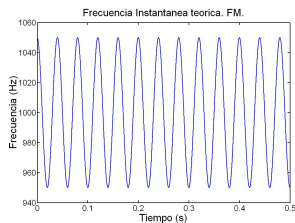


Fig. 9. Frecuencia instantánea teórica de la señal de FM. La frecuencia central es de 1kHz y la variación es de 50Hz.

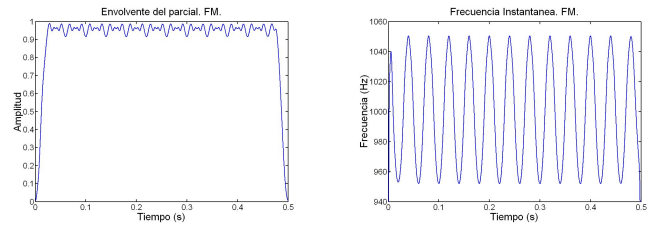


Fig. 10. (a) Módulo obtenido para la señal de FM. (b) Frecuencia instantánea obtenida para la señal de FM.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito un algoritmo de análisis de señales basado en la transformada wavelet continua y compleja. A diferencia de la transformada wavelet discreta y de la continua, la CCWT se ha presentado como una herramienta válida para la representación de fenómenos estacionarios de una señal. El algoritmo desarrollado permite la caracterización de leyes de variación frecuenciales. La validez del método se ha comprobado con cuatro señales no estacionarias: un chirp lineal, un chirp cuadrático, un chirp hiperbólico y una señal de FM con variación frecuencial sinusoidal. Los resultados obtenidos son altamente satisfactorios permitiendo recuperar perfectamente la envolvente de la señal y la ley de variación frecuencial correspondiente.

Todo ello supone que el algoritmo desarrollado es una buena herramienta para la caracterización mediante un modelo de síntesis aditiva de señales no estacionarias, como la señal de audio.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha financiado a través del proyecto CICYT TIC2003-06544.

## REFERENCES

- [1] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, chapter 4, Time Meets Frequency, pp. 67–124, Academic Press, 2nd. edition, 1998.
- [2] T. F. Quatieri and R. J. McAulay, "Audio Signal Processing based on sinusoidal analysis/synthesis," in *Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics*, M. Kahrs and K. Brandenburg, Eds. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] X. Serra and J. O. Smith, "Spectral modelling synthesis: A sound analysis/synthesis system based on a deterministic plus stochastic decomposition," *Computer Music Journal*, vol. 14, no. 4, pp. 12–24, 1990.
- [4] R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and A. Grossmann, "Analysis of sound patterns through wavelet transforms," *Int. J. of Patt. Recog. and Artif. Intell.*, vol. 1, no. 2, pp. 272–302, 1987.
- [5] R. Kronland-Martinet, "The Wavelet Transform for Analysis, Synthesis and Processing of Speech and Music Sounds," *Computer Music Journal*, vol. 12, no. 4, 1988.
- [6] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Tran. on Patt. Anal. and Machine Intell.*, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, 1989.
- [7] J. R. Beltran and F. Beltran, "Additive Synthesis Based on the Continuous Wavelet Transform: a Sinusoidal Plus Transient Model," *Proc. of the 6th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-03)*, 2003.
- [8] J. R. Beltran and J. Ponce de Leon, "Analysis and Synthesis of Sounds through Complex Bandpass Filterbanks," *Proc. of the 118th Convention of the Audio Engineering Society (AES'05)*. Preprint, 2005.